

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2020, Convocatoria ordinaria

mentoor.es

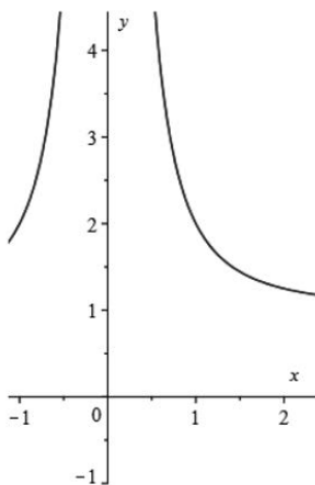


Sèrie 1

Ejercicio 1. Análisis

Trazamos la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ por un punto $P = (a, f(a))$ del primer cuadrante. Esta recta juntamente con los ejes de coordenadas forman un triángulo.

- a) Compruebe que el área de este triángulo, en función de a , viene dada por la función $g(a) = \frac{(a^2+3)^2}{4a}$.
- b) ¿En qué punto P el área del triángulo es mínima? Calcule este valor mínimo.



Solución:

- a) Compruebe que el área de este triángulo, en función de a , viene dada por la función $g(a) = \frac{(a^2+3)^2}{4a}$.

La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

$$f(a) = \frac{1}{a^2} + 1 = \frac{1 + a^2}{a^2}$$

$$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \implies f'(a) = -\frac{2}{a^3}$$

La recta tangente es: $y - \frac{a^2+1}{a^2} = -\frac{2}{a^3}(x - a) \implies y = -\frac{2}{a^3}x + \frac{2}{a^2} + \frac{a^2+1}{a^2} = -\frac{2}{a^3}x + \frac{a^2+3}{a^2}$.

Puntos de corte de la tangente con los ejes: Eje OY ($x=0$): $y_{int} = \frac{a^2+3}{a^2}$. Eje OX ($y=0$): $0 = -\frac{2}{a^3}x + \frac{a^2+3}{a^2} \implies \frac{2x}{a^3} = \frac{a^2+3}{a^2} \implies x_{int} = \frac{a(a^2+3)}{2}$.

El área del triángulo es $g(a) = \frac{1}{2} \cdot x_{int} \cdot y_{int} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(a^2+3)}{2} \cdot \frac{a^2+3}{a^2} = \frac{a(a^2+3)^2}{4a^2} = \frac{(a^2+3)^2}{4a}$.

Queda comprobado que el área es $g(a) = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a}$.

- b) ¿En qué punto P el área del triángulo es mínima? Calcule este valor mínimo.

Derivamos $g(a)$ para minimizar:

$$g'(a) = \frac{2(a^2 + 3)(2a)(4a) - (a^2 + 3)^2(4)}{16a^2} = \frac{4(a^2 + 3)[4a^2 - (a^2 + 3)]}{16a^2} = \frac{(a^2 + 3)(3a^2 - 3)}{4a^2}.$$

$g'(a) = 0 \implies 3a^2 - 3 = 0 \implies a^2 = 1 \implies a = 1$ (ya que P está en el primer cuadrante, $a > 0$). El punto P es $(1, f(1)) = (1, 1/1^2 + 1) = (1, 2)$. El área mínima es $g(1) = \frac{(1^2 + 3)^2}{4(1)} = \frac{16}{4} = 4$.

El punto es P(1,2) y el área mínima es 4 u².

Ejercicio 2. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real k :

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .
 b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $k = 0$.

Solución:

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante:

$$|A| = 5(-2k - 8) - 1(-k^2 - 40) + 4(k - 10) = -10k - 40 + k^2 + 40 + 4k - 40 = k^2 - 6k - 40.$$

Igualemos a cero: $k^2 - 6k - 40 = 0 \implies k = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2}$. Las raíces son $k = 10$ y $k = -4$.

Caso 1: $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 10\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. **S.C.D.**

Caso 2: $k = -4$. $|A| = 0$, $\text{Rg}(A) = 2$. $\text{Rg}(A^*) = 2$. **S.C.I.**

Caso 3: $k = 10$. $|A| = 0$, $\text{Rg}(A) = 2$. $\text{Rg}(A^*) = 3$. **S.I.**

Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 10\} \implies \text{S.C.D.}$ Si $k = -4 \implies \text{S.C.I.}$ Si $k = 10 \implies \text{S.I.}$
--

- b) Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $k = 0$.

Para $k = 0$, es S.C.D. $|A| = -40$. El sistema es $\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{cases}$.

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 1 & 4 \\ 28 & 2 & 8 \\ 23 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-40} = \frac{-160}{-40} = 4.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 19 & 4 \\ 0 & 28 & 8 \\ 5 & 23 & 0 \end{vmatrix}}{-40} = \frac{-120}{-40} = 3.$$



$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 19 \\ 0 & 2 & 28 \\ 5 & 1 & 23 \end{vmatrix}}{-40} = \frac{-40}{-40} = 1.$$

La solución es (4, 3, 1).

Ejercicio 3. Geometría

- a) Calcule la ecuación general del pla π que pasa por el punto $(8, 8, 8)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 3)$.
- b) Determine el valor del parámetro a para que el punto $(1, -5, a)$ pertenezca al pla π y calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por este punto y es perpendicular al pla π .

Solución:

- a) Calcule la ecuación general del pla π que pasa por el punto $(8, 8, 8)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 3)$.

El plano está definido por el punto $P(8,8,8)$ y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

La ecuación del plano viene dada por el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-8 & y-8 & z-8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x-8)(6) - (y-8)(3-3) + (z-8)(2) = 0 \implies 6x - 48 + 2z - 16 = 0 \implies 6x + 2z - 64 = 0.$$

Simplificando, la ecuación es $3x + z - 32 = 0$.

La ecuación del plano es $3x + z - 32 = 0$.

- b) Determine el valor del parámetro a para que el punto $(1, -5, a)$ pertenezca al pla π y calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por este punto y es perpendicular al pla π .

El punto $Q(1,-5,a)$ debe satisfacer la ecuación del plano: $3(1) + a - 32 = 0 \implies 3 + a - 32 = 0 \implies a = 29$.

La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano, $\vec{n} = (3, 0, 1)$.

La recta pasa por $Q(1,-5,29)$.

El valor es $a = 29$. La recta es $(x, y, z) = (1, -5, 29) + \lambda(3, 0, 1)$.

Ejercicio 4. Análisis

Considere la función $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$, en que a y b son dos parámetros reales. Calcule los valores de a y b de manera que la función $f(x)$ tenga una asíntota oblicua de pendiente 1 y un mínimo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 2$.

Solución:

1. Asíntota oblicua de pendiente 1:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{x^2} = a.$$

Como la pendiente es 1, tenemos que $a = 1$.

2. **Mínimo en $x=2$:** La derivada debe anularse en $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{(2ax)x - (ax^2 + b)(1)}{x^2} = \frac{2ax^2 - ax^2 - b}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2}.$$

$$f'(2) = 0 \implies \frac{a(2^2) - b}{2^2} = 0 \implies 4a - b = 0.$$

Sustituyendo $a = 1$, tenemos $4(1) - b = 0 \implies b = 4$.

La segunda derivada $f''(x) = \frac{2b}{x^3}$ en $x = 2$ es $f''(2) = \frac{8}{8} = 1 > 0$, lo que confirma que es un mínimo.

Los valores son $a = 1$ y $b = 4$.

Ejercicio 5. Álgebra

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

- Encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX = I - 3X$, en que I es la matriz identidad de orden 2.
- Compruebe que la matriz X es invertible y calcule su matriz inversa.

Solución:

- Encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX = I - 3X$, en que I es la matriz identidad de orden 2.

Reordenamos la ecuación: $AX + 3X = I \implies (A + 3I)X = I$.

Esto implica que $X = (A + 3I)^{-1}$.

Calculamos $A + 3I$:

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos la inversa de esta matriz: $|A + 3I| = -4 - (-3) = -1$.

$$X = (A + 3I)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

- Compruebe que la matriz X es invertible y calcule su matriz inversa.

La matriz X es invertible si su determinante es no nulo.

$|X| = 1(-4) - 1(-3) = -1 \neq 0$. Es invertible.

Como $X = (A + 3I)^{-1}$, su inversa es $X^{-1} = ((A + 3I)^{-1})^{-1} = A + 3I$.

$$X^{-1} = A + 3I = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es invertible porque $|X| = -1 \neq 0$. Su inversa es $X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.



Ejercicio 6. Análisis

Considere la función $f(x) = x^3$.

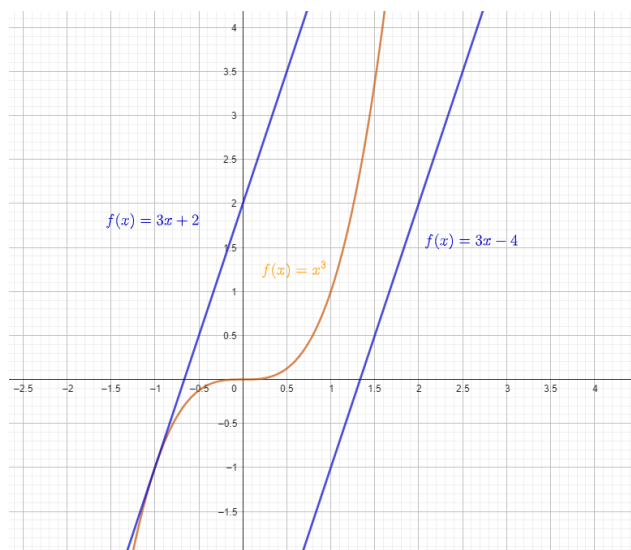
- Calcule en qué punto del tercer cuadrante la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la recta $3x - y = 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en este punto y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función y las dos rectas.
- Calcule el área de la región delimitada por $y = f(x)$ y la recta $y = 3x + 2$.

Solución:

- Calcule en qué punto del tercer cuadrante la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la recta $3x - y = 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en este punto y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función y las dos rectas.

La pendiente de $3x - y = 4 \implies y = 3x - 4$ es $m = 3$. $f'(x) = 3x^2$. Igualamos las pendientes: $3x^2 = 3 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$. El tercer cuadrante es donde $x < 0$, así que elegimos $x = -1$. El punto es $(-1, f(-1)) = (-1, -1)$. La recta tangente es $y - (-1) = 3(x - (-1)) \implies y + 1 = 3x + 3 \implies y = 3x + 2$.

Punto: $(-1, -1)$. Recta tangente: $y = 3x + 2$.



- Calcule el área de la región delimitada por $y = f(x)$ y la recta $y = 3x + 2$.

Puntos de corte: $x^3 = 3x + 2 \implies x^3 - 3x - 2 = 0$. Por Ruffini, las raíces son $x = -1$ (doble) y $x = 2$. El área es $\int_{-1}^2 ((3x + 2) - x^3) dx$.

$$A = \left[\frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^2 = (6 + 4 - 4) - \left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{4} \right) = 6 - \left(-\frac{3}{4} \right) = 6 + \frac{3}{4} = \frac{27}{4}.$$

El área es $\frac{27}{4}$ u².

Sèrie 3

Ejercicio 1. Álgebra

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en que a es un parámetro real.

- Determine el rango de la matriz A en función del parámetro a .
- Compruebe que $\det(A^2 + A) = 0$ para cualquier valor de a .

Solución:

- Determine el rango de la matriz A en función del parámetro a .

El rango de la matriz dependerá de si su determinante es nulo o no.

Calculamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1(-1 - a) - 0(1 - 0) + 2(a - 0) = -1 - a + 2a = a - 1.$$

Igualemos el determinante a cero para encontrar los valores críticos:

$$|A| = 0 \implies a - 1 = 0 \implies a = 1.$$

Caso 1: $a \neq 1$. Si $a \neq 1$, el determinante es distinto de cero ($|A| \neq 0$), por lo que el rango de la matriz es 3.

Caso 2: $a = 1$. Si $a = 1$, el determinante es cero ($|A| = 0$), por lo que el rango es menor que 3. Buscamos un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Como existe un menor de orden 2 no nulo, el rango de la matriz es 2.

Si $a = 1$, el rango de A es 2.
Si $a \neq 1$, el rango de A es 3.

- Compruebe que $\det(A^2 + A) = 0$ para cualquier valor de a .

Podemos usar la propiedad $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

Factorizamos la expresión: $A^2 + A = A(A + I)$.

Calculamos la matriz $A + I$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos el determinante de $A + I$:

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix} = 2(0 - a) - 0(2 - 0) + 2(a - 0) = -2a + 2a = 0.$$

Como $|A + I| = 0$, el determinante del producto será:

$$\det(A^2 + A) = \det(A(A + I)) = \det(A) \cdot \det(A + I) = (a - 1) \cdot 0 = 0.$$

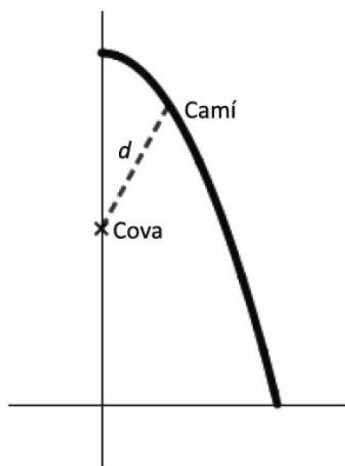
Esto se cumple para cualquier valor de a .

Queda comprobado que $\det(A^2 + A) = 0$ para todo valor de a .

Ejercicio 2. Análisis

Se han encontrado unas pinturas rupestres en una cueva situada en una zona muy pedregosa. Hay un camino que bordea parcialmente la cueva formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(0, 4)$ y $(2, 0)$. La cueva está situada en el punto de coordenadas $(0, 2)$, tal como se muestra en la figura, y se quiere habilitar un acceso rectilíneo d desde el camino a la cueva que sea el más corto posible.

- Identifique en la gráfica de la figura las coordenadas de la cueva y del punto del camino desde donde se quiere habilitar el acceso. Compruebe que la función $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distancia desde cada punto del camino a la cueva.
- Calcule las coordenadas del punto del camino que queda más cerca de la cueva y diga cuál será la longitud del acceso d .



Solución:

- Identifique en la gráfica de la figura las coordenadas de la cueva y del punto del camino desde donde se quiere habilitar el acceso. Compruebe que la función $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distancia desde cada punto del camino a la cueva.

Las coordenadas de la cueva son $C(0, 2)$. Un punto genérico del camino es $P(x, y)$ donde $y = 4 - x^2$. Así, $P(x, 4 - x^2)$. La distancia entre C y P es $d(C, P) = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$.

$$d(x) = \sqrt{(x - 0)^2 + ((4 - x^2) - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$

La función $f(x)$ dada es, efectivamente, la distancia desde un punto del camino a la cueva.

Queda comprobada la expresión de la distancia.

- Calcule las coordenadas del punto del camino que queda más cerca de la cueva y diga cuál será la longitud del acceso d .

Minimizar $f(x)$ es equivalente a minimizar la función dentro de la raíz, $g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$, para $x \in [0, 2]$.

$$g'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3).$$

$$g'(x) = 0 \implies x = 0 \text{ o } 2x^2 - 3 = 0 \implies x^2 = 3/2 \implies x = \sqrt{3/2}.$$

Evaluamos la distancia en los puntos críticos y los extremos del intervalo: $g(0) = 4 \implies d(0) = 2$.
 $g(2) = 16 - 12 + 4 = 8 \implies d(2) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $g(\sqrt{3/2}) = (3/2)^2 - 3(3/2) + 4 = 9/4 - 9/2 + 4 = 7/4 \implies d(\sqrt{3/2}) = \sqrt{7/4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

El valor mínimo es $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1.32$, que ocurre en $x = \sqrt{3/2}$. El punto del camino es $P(\sqrt{3/2}, 4 - (\sqrt{3/2})^2) = (\sqrt{3/2}, 5/2)$.

Punto: $(\sqrt{3/2}, 5/2)$. **Longitud:** $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Ejercicio 3. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .
 b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

Solución:

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = a(a-2) - 1(1-1) = a^2 - 2a = a(a-2).$$

$$|A| = 0 \text{ si } a = 0 \text{ o } a = 2.$$

$$\text{Caso 1: } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3. \text{ S.C.D.}$$

$$\text{Caso 2: } a = 0. \text{ Rg}(A) = 2. \text{ Rg}(A^*) = 3. \text{ S.I.}$$

$$\text{Caso 3: } a = 2. \text{ Rg}(A) = 2. \text{ Rg}(A^*) = 2. \text{ S.C.I.}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} &\implies \text{S.C.D.} \\ \text{Si } a = 0 &\implies \text{S.I.} \\ \text{Si } a = 2 &\implies \text{S.C.I.} \end{aligned}$$

- b) Resuelva el sistema para el caso $a = 2$.

$$\text{Para } a = 2 \text{ es S.C.I. } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Hacemos } y = \lambda. \quad x = \frac{2-\lambda}{2} = 1 - \frac{\lambda}{2}.$$

$$z = 5 - x - 2y = 5 - (1 - \lambda/2) - 2\lambda = 4 - 3\lambda/2.$$

$$\text{La solución es } (1 - \lambda/2, \lambda, 4 - 3\lambda/2), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4. Análisis

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en que $\ln$ indica el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$.

- Calcule las coordenadas del punto de la corba $y = f(x)$ en que la recta tangente a la corba en este punto es horizontal. Estudie si este punto es un extremo relativo y clasifíquelo.
- Calcule el área del recinto delimitado por la corba $y = f(x)$, las rectas verticales $x = 1$ y $x = e$ y el eje de las abscisas.

Solución:

- Calcule las coordenadas del punto de la corba $y = f(x)$ en que la recta tangente a la corba en este punto es horizontal. Estudie si este punto es un extremo relativo y clasifíquelo.

La tangente es horizontal si $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(x) + \frac{1}{x} \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \implies 1 - \ln(x) = 0 \implies \ln(x) = 1 \implies x = e.$$

El punto es $(e, f(e)) = (e, \frac{\ln e}{e}) = (e, 1/e)$.

Para clasificarlo, estudiamos el signo de $f'(x)$: Si $0 < x < e$, $f'(x) > 0$ (crece). Si $x > e$, $f'(x) < 0$ (decrece). Por tanto, es un máximo relativo.

El punto es $(e, 1/e)$ y es un máximo relativo.

- Calcule el área del recinto delimitado por la corba $y = f(x)$, las rectas verticales $x = 1$ y $x = e$ y el eje de las abscisas.

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

Hacemos el cambio de variable $u = \ln x$, $du = dx/x$.

$$A = \int_{\ln 1}^{\ln e} u du = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

El área es $1/2$ u².

Ejercicio 5. Geometría

Considere la recta r de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ y la recta s que pasa por el punto $P = (2, -5, 1)$ y que tiene por vector director $(-1, 0, -1)$.

- Estudie la posición relativa de las rectas r y s .
- Calcule la ecuación general del plano que es paralelo a la recta r y contiene la recta s .

Solución:

- Estudie la posición relativa de las rectas r y s .

$$P_r(1, 3, 0), \vec{v}_r(2, -2, 1). \quad P_s(2, -5, 1), \vec{v}_s(-1, 0, -1).$$

Los vectores directores no son proporcionales. Las rectas se cortan o se cruzan.

Estudiamos la coplanaridad con $\vec{P_rP_s} = (1, -8, 1)$.

$$[\vec{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(2) - (-8)(-1) + 1(-2) = 2 - 8 - 2 = -8 \neq 0.$$

Como el producto mixto es no nulo, las rectas se cruzan.

Las rectas se cruzan.

- Calcule la ecuación general del plano que es paralelo a la recta r y contiene la recta s .

El plano π pasa por $P_s(2, -5, 1)$ y está generado por los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x-2)(2) - (y+5)(-1) + (z-1)(-2) = 0 \implies 2x - 4 + y + 5 - 2z + 2 = 0 \implies 2x + y - 2z + 3 = 0.$$

La ecuación del plano es $2x + y - 2z + 3 = 0$.

Ejercicio 6. Análisis

Una empresa de cerámica quiere poner a la venta una baldosa cuadrada de 20 cm de lado pintada a dos colores, de manera que la superficie de cada color sea la misma y que si se ponen las baldosas una al lado de la otra se vea un dibujo continuo (figura 1). Para hacerlo, la empresa utiliza en cada baldosa la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ encuadrada entre los puntos de coordenadas (0,0), (0,2), (2,0) y (2,2), tal como se muestra en la figura 2, y usa como unidad de medida el decímetro.

- Justifique que, efectivamente, esta función permite juntar las baldosas de manera continua y derivable.
- Justifique que esta función divide el cuadrado mencionado en dos partes que tienen la misma superficie.

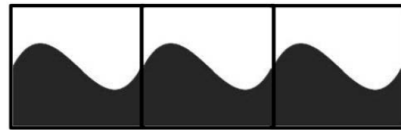


Figura 1



Figura 2

Solución:

- Justifique que, efectivamente, esta función permite juntar las baldosas de manera continua y derivable.

Para que el dibujo sea continuo, la altura de la curva debe ser la misma en el inicio ($x = 0$) y en el final ($x = 2$).

$$f(0) = 1.$$

$$f(2) = 2^3 - 3(2^2) + 2(2) + 1 = 8 - 12 + 4 + 1 = 1.$$

Como $f(0) = f(2) = 1$, las alturas coinciden.

Para que la unión sea derivable (suave), las pendientes deben ser las mismas en el inicio y el final.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

$$f'(0) = 2.$$

$$f'(2) = 3(2^2) - 6(2) + 2 = 12 - 12 + 2 = 2.$$

Como $f'(0) = f'(2) = 2$, las pendientes coinciden.

Se justifica porque $f(0) = f(2)$ y $f'(0) = f'(2)$.

- Justifique que esta función divide el cuadrado mencionado en dos partes que tienen la misma superficie.

La baldosa es un cuadrado de lado 2 dm (de $x=0$ a $x=2$, y de $y=0$ a $y=2$). Su área total es $2 \times 2 = 4$ dm². Para que las dos partes tengan la misma superficie, el área de cada una debe ser de 2 dm². Calculamos el área de la parte inferior (negra), que es el área bajo la curva $f(x)$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

$$A = \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x \right]_0^2$$

$$= \left(\frac{16}{4} - 8 + 4 + 2 \right) - 0 = 4 - 8 + 4 + 2 = 2.$$

El área de la parte inferior es de 2 dm^2 . El área de la parte superior (blanca) será $4 - 2 = 2 \text{ dm}^2$.

Se justifica porque el área bajo la curva es 2 dm^2 , la mitad del área total de 4 dm^2 .